



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
UNIDAD ZACATENCO**



**ACADEMIA DE MATEMÁTICAS
TURNO VESPERTINO**

CURSO PROPEDÉUTICO DE MATEMÁTICAS

- **ARITMÉTICA**
- **ALGEBRA**
- **GEOMETRÍA**
- **TRIGONOMETRÍA**

OBJETIVO:

REFORZAR LOS CONOCIMIENTOS BÁSICOS EN MATEMÁTICAS, CON LA FINALIDAD DE FAVORECER LA COMPRENSIÓN Y APRENDIZAJE, EN LAS MATERIAS DE MATEMÁTICAS I (CALCULO DIFERENCIAL, CALCULO INTEGRAL Y ALGEBRA LINEAL) Y FÍSICA CORRESPONDIENTES AL PRIMER SEMESTRE DE LA CARRERA DE INGENIERO CIVIL.

ARITMÉTICA.

Realiza las operaciones, eliminando los paréntesis.

Sol.

- | | |
|--|-----|
| 1.- $(5) + (3) + (4) - (-2) =$ | 10 |
| 2.- $6 - (-2) + (7 - 13) - 9 =$ | -7 |
| 3.- $-3 - (-2) + (-1) - 5 + (-7) - 2 =$ | -16 |
| 4.- $-2 - 3 - (6) - (-8) + 9 - 5 - (-8) - 2 =$ | 7 |
| 5.- $-3 - (-5) + 6 - 7 - 3 + (-2) + 4 - 1 =$ | -1 |

Paréntesis, lleva y corchetes

- | | |
|--|----|
| 1.- $-[-(-2) + (-5)] - [-(-2) + (-3)]$ | 8 |
| 2.- $[-(-3) + (5 - 2)] - [-(-2) - 8 + (-1)]$ | 13 |
| 3.- $\{-[-(-3 - 2) - 5 - (-3)] - (-5 + 4)\} - [-6 - (-5) - 1] + 2$ | 2 |
| 4.- $\{-[-(-2 - 1) + (3 - 2 - 3 - 2)] - 3 - (-2)\} - (-1) - [-(-2) + 3]$ | -4 |
| 5.- $- \{-[-(-3) - (-2 - 8)] - [-(-6 - 2) - (-3)] - 4\} - (-3 - 8)$ | 39 |

Elementos de Potencia

- $4^2 + 3^2 - 2^2 =$
- $-2^2 - 2^3 + 1^{10} + (-2)^3 =$
- $(-5 - 1)^2 + (3 - 2)^0 + (-4)^3 =$
- $8(7 - 4)^3 =$
- $(-7 + 4)^3 \div (-9 + 6) =$

Hallar el Valor numérico en las expresiones algebraicas, sustituyendo el valor numérico

- | | | |
|--------------------------------------|----------------|----|
| 1.- $6 - (3x + 1) + 2x^2$ | Si $x=4$ | 25 |
| 2.- $5x^2 - 2x + 5$ | Si $x=3$ | 44 |
| 3.- $-6x + 3y^2$ | Si $x=2, y=4$ | 36 |
| 4.- $-3 - \{2x - [5x - (2x + 1)]\}$ | Si $x=3$ | -1 |
| 5.- $[ab - 2a] - [-3a - 2b] + a + b$ | Si $a=-2, b=1$ | -3 |

Realiza las operaciones con números racionales.

- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} =$
- $2\frac{2}{3} - 3\frac{3}{5} + \frac{7}{30} =$
- $4. - \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) =$
- $5. - \left(-\frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right) =$

Simplifica los resultados.

$$1.- \left(-\frac{4}{9}\right) \div \left[\left(-\frac{10}{9}\right) \div \left(-\frac{5}{6}\right)\right] \quad -\frac{1}{3}$$

$$2.- \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) - \frac{5}{6}\right] \quad -\frac{7}{12}$$

$$3.- \frac{\frac{2}{6} - \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{3}\right) + 1}{\frac{2}{8}} \quad \frac{74}{15}$$

$$4.- \frac{1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}} \quad \frac{1}{2}$$

$$5.- \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right)} \quad \frac{1}{10}$$

POTENCIAS Y RADICALES.

Realiza las operaciones

Sol.

$$1.- \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \sqrt[3]{-\frac{27}{64}} \quad \frac{7}{8}$$

$$2.- \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{1 - \frac{8}{9}} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}} \quad 1\frac{1}{3}$$

$$3.- \frac{\sqrt{\frac{16}{36}} + \sqrt[3]{\frac{8}{27}}}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}}} \quad \frac{16}{4}$$

$$4.- \frac{2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 - \sqrt{\frac{9}{4}}} \quad -\frac{3}{2}$$

$$5.- \frac{\left(2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{2} - 3\right)^3}{\sqrt{1 + \frac{1}{8} + \frac{7}{16}}} \quad \frac{51}{20}$$

Reduce los Radicales.

1.- $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$	$5\sqrt{5}$
2.- $4\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{40}$	$-6\sqrt[3]{5}$
3.- $-4\sqrt{90} + 3\sqrt{40} + 2\sqrt{10}$	$-4\sqrt{10}$
4.- $10\sqrt{8} - 2\sqrt{2} - \sqrt{162} + 2\sqrt{32}$	$17\sqrt{2}$
5.- $-6\sqrt{75} + 4\sqrt{125}$	$-30\sqrt{3} + 20\sqrt{5}$

Desarrolla la Notación científica.

- 1.- $1.2x10^2 =$
- 2.- $40x10^3 =$
- 3.- $0.54x10^6 =$
- 4.- $0.64x10^{-7} =$
- 5.- $568 =$

Hallar el valor x desconocido para formar la proporción.

- 1.- $\frac{X}{9} = \frac{8}{3}$
- 2.- $X : 6 = 8 : 3$
- 3.- $X : 9 = 10 : 15$
- 4.- $\frac{X}{32} = \frac{2}{4}$
- 5.- $\frac{5}{7} = \frac{15}{X}$

ALGEBRA.

Reduce los términos semejantes.

- 1.- $3a + a =$
- 2.- $2a + b + 3a + 2b =$
- 3.- $5ab + a^2 - 4ab + a^2 =$
- 4.- $8x^2y + 3xy^2 - 3x^2y + xy^2 =$
- 5.- $a^2b + ab^2 - a^2b + ab^2 =$

Elimina los paréntesis

1.- $2 + [x - (3 - x)]$	$2x - 1$
2.- $4 - [x - (5 - x)]$	$-2x + 9$
3.- $(5x - 4y) - [(3x - y) - (4x + y)]$	$6x - 2y$
4.- $6x - \{5 - [3 + (7x - 8)]\}$	$13x - 10$
5.- $\{7 - [5 - (2 - x)]\} + 5(2 - x)$	$-6x + 14$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

- 1.- $x(3x - 5) =$
- 2.- $3y(y^2 - 4) =$
- 3.- $-2a^2(-5a + 2a^3) =$
- 4.- $2x^2y(3x^2y - x) =$
- 5.- $-3b(2ab + b^2 + 5bc) =$

Multiplica los polinomios

- 1.- $(2x+3)(5x-2) =$
- 2.- $(x+1)(x+2)(x+3) =$
- 3.- $(2x-y)(x-3y)(y-2) =$
- 4.- $(4x-3)^2 =$
- 5.- $(3x-1)^3 =$

Productos notables

- 1.- $(8a^2 + 7ab^6)^2 =$
- 2.- $(x^2 - 3xy^2z^6)^2 =$
- 3.- $(3a - \frac{b}{5})^2 =$
- 4.- $(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{5}yz)^2 =$
- 5.- $(9x^2 - 7y)^2 =$

Binomios conjugados

- 1.- $(b^2 - \frac{1}{2})(b^2 + \frac{1}{2}) =$
- 2.- $(\frac{2a}{3} - 5b)(\frac{2a}{3} + 5b) =$
- 3.- $(-6m^2n^3 - 7m)(-6m^2n^3 + 7m) =$
- 4.- $(2x^2 + 3)(-3 + 2x^2) =$
- 5.- $(7a^2m - 4mx^3)(7a^2m + 4mx^3) =$

Productos con un término

- 1.- $(x+2)(x+5) =$
- 2.- $(x+7)(x-3) =$
- 3.- $(x^2 - 2y)(x^2 - y) =$
- 4.- $(6x^2 - 2)(6x^2 - 7y) =$
- 5.- $(x-8)(x-1) =$

División polinomios entre monomio

- 1.- $\frac{20a^3b + 25a^2c - 15a^5}{-5a^3} \quad -4b - 5ac + 3a^2$
- 2.- $\frac{32x^2y^3z^4 - 24x^4y^3z^2}{-4x^2y^2z^2} \quad -84yz^2 + 6x^2y$
- 3.- $\frac{xy^2z^3 - x^3y^2z + x^2y^2c^2}{xy^2z} \quad z^2 - x^2 + \frac{xc^2}{z}$
- 4.- $\frac{20x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 15x}{-5x} \quad -4x^3 + x^2 + 2x - 3$
- 5.- $\frac{3a^3 - 6a^2b + 9ab^2}{3a} \quad a^2 - 2ab + 3b^2$

Simplifica

$$\begin{array}{l}
 1.- \frac{8a^3b^{-5}}{4a^{-1}b^2} \qquad \frac{2a^4}{b^7} \\
 2.- \frac{x^{-3}y^4z^{-1}}{y^{-3}z} \qquad \frac{y^7}{x^3z^2} \\
 3.- \frac{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{a^{-3}b^{-2}c} \qquad \frac{a^2}{c^4} \\
 4.- \frac{x^{-3}y^{-1}z^2}{x^{-2}y^{-3}z^{-1}} \qquad \frac{y^2z^3}{x} \\
 5.- \frac{x^{-6}z^{-4}y^{-3}}{x^{-4}z^2y^{-7}} \qquad \frac{y^4}{x^2z^6}
 \end{array}$$

Operaciones con exponentes

$$\begin{array}{l}
 1.- (5x^2y^{-2}z^4)(-2x^5y^2z) \qquad -10x^7z^5 \\
 2.- (x^{-5}y^8)^2(x^3y^{-2})^4 \qquad \frac{x^2}{y^2} \\
 3.- \left(\frac{x^6y^{-2}}{x^{-3}y^3}\right)^2 \left(\frac{x^{-1}y^{-3}}{x^{-4}y^2}\right)^{-3} \qquad x^9y^5 \\
 4.- \left(\frac{(4x^{-5}y^{-2})(3x^2y^{-5})}{24x^3y^{-4}}\right) \qquad \frac{1}{2x^6y^3} \\
 5.- y^{3b+2}(y^{2b+4})^2 \qquad y^{7b+10}
 \end{array}$$

Simplificar los siguientes radicales

$$\begin{array}{l}
 1.- \sqrt{81x^6y^8} = \\
 2.- \sqrt{ab^2c^7x^{13}y^{17}} = \\
 3.- \sqrt{a^7b^8z^{14}c^{16}} = \\
 4.- \sqrt{18x^4y^7z^{15}} = \\
 5.- \sqrt{80x^5y^{12}z^3} =
 \end{array}$$

Operaciones con radicales

$$\begin{array}{l}
 1.- \sqrt{\frac{15xy^5}{3x^9y}} \qquad \frac{y^4\sqrt{5}}{x^2} \\
 2.- \sqrt{\frac{32a^3b^9c^2}{2a^8b^2c^2}} \qquad \frac{4b^3}{ac} \sqrt{\frac{b}{ac}} \\
 3.- \sqrt{\frac{80x^3y^9z^5}{20x^7yz^{10}}} \qquad \frac{2y^4}{x^2z^2\sqrt{z}} \\
 4.- \frac{\sqrt[3]{a^2b^3z^{10}c^8}}{\sqrt[3]{a^9b^8zc^5}} \qquad \frac{z^3c}{a^2b\sqrt[3]{ab^2}}
 \end{array}$$

Potencia de radicales

1.- $(\sqrt{x})^3$

2.- $(\sqrt[4]{25x^3y^2})^3$

3.- $(\sqrt{3ax^3})^3$

4.- $\sqrt[3]{\sqrt[3]{n^{20}x^{30}y^{37}}}$

5.- $\sqrt[3]{\sqrt{64x^9y^6z^{17}}}$

Sol.

$x\sqrt{x}$

$5x^2y^4\sqrt[4]{25xy^2}$

$3ax^4\sqrt{3ax}$

$nxy^2\sqrt[18]{n^2x^{12}y}$

$2xyz^2\sqrt[6]{x^3z^5}$

Factorización por factores común

1.- $2x^3y - xy^2 + 3x^2y =$

2.- $3x^2y + 6x^2y^2 + 3xy =$

3.- $5x^3y^2 - 3x^2y^2 - 2x =$

4.- $2x(a-1) - y(a-1) =$

5.- $(x-a)(y+2) + b(y+2) =$

Factorización por diferencia de cuadrados

1.- $x^2 - 25 =$

2.- $z^2 - 64w^2 =$

3.- $(2x+y)^2 - (3y-z)^2 =$

4.- $81 - \frac{9y^6}{36} =$

5.- $49y^2 - 25x^2 =$

Factorización por diferencias de cubos

1.- $x^3 - 27 =$

2.- $x^3 - 81 =$

3.- $x^3 - 8y^3 =$

4.- $x^3 + 1 =$

5.- $x^3 + 8 =$

Factorización de termino de la forma $ax^2 + bx + c$

1.- $3x^2 - 5x - 2 =$

2.- $10x - 8 + 7x^2 =$

3.- $10x^2 - 11x - 6 =$

4.- $4x^2 - 6x + 3 =$

5.- $3x^2 - 14x - 5 =$

Factorización por término cuadrado perfecto

1.- $4x^2 + 4x + 1 =$

2.- $9x^4 - 24x^2y + 16y^2 =$

3.- $25x^2 + 30x + 9 =$

4.- $36x^2 - 60xy + 25y^2 =$

5.- $64b^2 - 16b + 1 =$

Factorización por agrupación de términos

- 1.- $bx-ab+x^2-ax = (x-a)(x+b)$
- 2.- $3ax-ay-3bx+by = (3x-y)(a-b)$
- 3.- $6x^2-4ax-9bx+6ab = (3x-2a)(2x-3b)$
- 4.- $2ay^2-axy+6xy-3xy^2 = (2y-x)(ay+3x)$
- 5.- $2x^2+10x-xy+5y = (x+5)(2x-y)$

Factorización de combinadas

- 1.- $2a^3-16b^3 = 2(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$
- 2.- $x^3+x^2-9x-9 = (x+1)(x+3)(x-3)$
- 3.- $5x^3-5x^2-30x = 5x(x-3)(x+2)$
- 4.- $3x^2y^2-24xy^2+48y^3 = 3y^2(x-4)^2$
- 5.- $12x^2-36xy+27y^2 = 3(2x-3y)^2$

Operaciones con expresiones algebraicas

- 1.- $\frac{5a^3}{2b^3} + \frac{3a^2}{2b^3} + \frac{15a^2}{2b^2} =$
- 2.- $\frac{5x}{a} + \frac{7x}{a} + \frac{11x}{a} =$
- 3.- $\frac{3a-5}{4b^2c} - \frac{4a-5b}{4b^2c} + \frac{7a}{4b^2c} - \frac{5}{4b^2c} =$
- 4.- $\frac{x^2-2}{x^2+6x-x7} - \frac{-4x+19}{x^2+6x-7} =$
- 5.- $\frac{x^2+3x-2}{(x+5)(x-2)} + \frac{4x-12}{(x+5)(x-2)} =$

Operaciones con denominadores diferentes

- 1.- $\frac{4a}{3b} + \frac{5b}{6a} =$
- 2.- $\frac{6}{x^2} + \frac{3}{2x} =$
- 3.- $\frac{5}{12x^4y} - \frac{1}{18x^2y^3} =$
- 4.- $\frac{5}{2x} - \frac{3}{4x^2} =$
- 5.- $\frac{3}{x} + \frac{4}{3y} =$

Polinomios con diferentes denominadores

- 1.- $\frac{5}{x+3} + \frac{10}{x^2-9} =$
- 2.- $\frac{2x}{x+2y} - \frac{3x}{x-2y} + \frac{7x+1}{x^2-4y^2} =$
- 3.- $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x^2} =$
- 4.- $\frac{4}{5x^2-5x} - \frac{3}{5x-5} =$
- 5.- $\frac{x}{3x+1} - \frac{3x}{x-3} =$

Multiplicaciones y divisiones entre polinomios

- 1.- $\frac{x^2+9}{x^2+2x-3} \div \frac{x^2-6x-27}{x^2-10x+9} =$
- 2.- $\frac{4x^3}{3x^2-3xy} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2} =$
- 3.- $\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x-4} \div \frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+8} =$
- 4.- $\frac{2a-4}{6a} \div \frac{a^2-4a+3}{a^2-5a+6} \cdot \frac{a}{a-2} =$
- 5.- $\frac{a^3+3a}{a^2-9} \div \frac{a^2+2a}{a^2-5+6} =$

Resolver las siguientes ecuaciones

- | | | |
|---|------|-------|
| 1.- $4x+7 = 5x+4$ | Sol. | $x=3$ |
| 2.- $3\{[(x-2) + 4x] - (x-3)\} = 4 \cdot (x-12)$ | | $x=1$ |
| 3.- $\frac{4x+3}{4} = x+6$ | | $x=0$ |
| 4.- $\frac{15}{x+3} + \frac{12}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$ | | $x=1$ |
| 5.- $\frac{11}{x+7} - \frac{4}{2x-1} = \frac{15}{2x^2+13x-7}$ | | $x=3$ |

Despeje de formulas

- | | | |
|------------------------------------|---------|-------|
| 1.- $A = \frac{1}{2} (b_1 + b_2)h$ | despeje | h |
| 2.- $C = \frac{5}{9} (f-32)$ | | f |
| 3.- $Q = C(T_2-T_1)$ | | T_2 |
| 4.- $L = \sqrt{mkr}$ | | r |
| 5.- $Ec = \frac{1}{2} mv^2$ | | m |

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

- | | |
|---|--|
| 1. $4x + 3y = -1$
$x + 3y = 11$ | $x = -4$
$y = 5$ |
| 2. $\frac{5x}{3} + \frac{7y}{2} = 9$
$4x - 5y = -32$ | $x = -3$
$y = 4$ |
| 3. $5x - 4y = 0$
$3x - 2y = 4$ | $x = 8$
$y = 10$ |
| 4. $4x + 2y = 5$

$5x - 3y = -2$ | $x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{3}{2}$ |
| 5. $2x + 5y = -21$
$x + 3y = -14$ | $x = 7$
$y = -7$ |

Sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. $3x + 2y + z = 4$
$2x - 3y + 2z = -7$
$x + 4y - z = 10$ | $x = 2$
$y = 1$
$z = -4$ |
| 2. $3D + 4E + F = -9$
$E + F = 0$
$-2D + 9E + F = -4$ | $D = -2$
$E = -1$
$F = 1$ |
| 3. $x + 3y - z = 1$
$x - y + 2z = -4$
$2x + y + 3z = 2$ | $x = -9$
$y = 5$
$z = 5$ |
| 4. $x + y + z = 6$
$2x + 3y - z = 5$
$3x - 5y + 8z = 17$ | $x = 1$
$y = 2$
$z = 3$ |
| 5. $2x - y + 3z = -1$
$x + 5y - 2z = -1$
$3x + 4y - z = 4$ | $x = 3$
$y = -2$
$z = -3$ |

Ecuaciones cuadráticas de segundo grado, (fórmula general).

- | | |
|----------------------------|---|
| 1. $7x^2 + 5x = 0$ | $x = 0, x = -\frac{5}{7}$ |
| 2. $8x^2 + 28 = 5x^2 + 76$ | $x = 4, x = -4$ |
| 3. $3x^2 = 25$ | $x = \frac{5}{\sqrt{3}}, x = -\frac{5}{\sqrt{3}}$ |
| 4. $5x - 2 = -3x^2$ | $x = \frac{1}{3}, x = -2$ |
| 5. $4x^2 + 20x + 25 = 0$ | $x = -\frac{5}{2}, x = -\frac{5}{2}$ |

6. $2x^2 + 9x = 5$

$x = -5, x = \frac{1}{2}$

7. $x^2 + 11x = -18$

$x = -9, x = -2$

8. $-x = -x^2 + 2$

$x = -1, x = 2$

9. $x^2 + 3 = -4x$

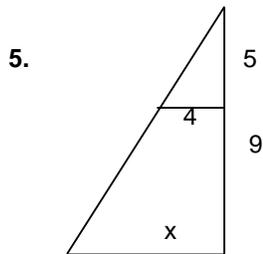
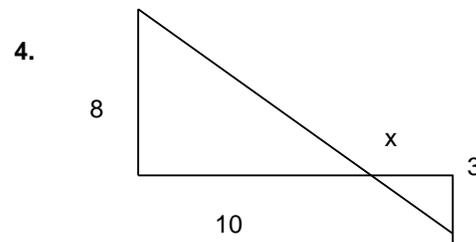
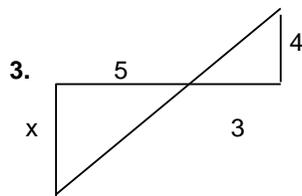
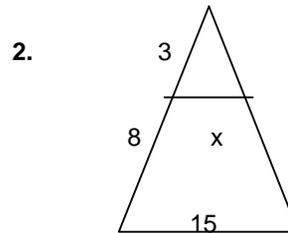
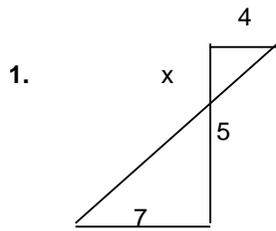
$x = -3, x = -1$

10. $x^2 + x - 20 = 0$

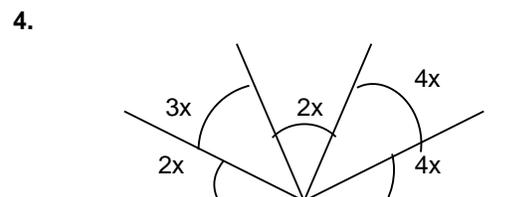
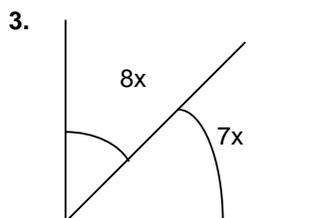
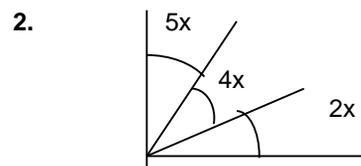
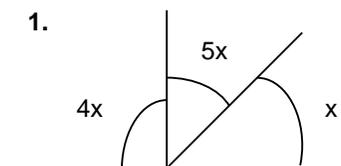
$x = -5, x = 4$

GEOMETRÍA.

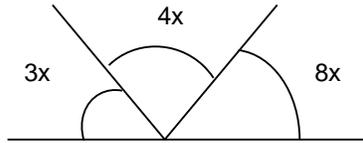
Obtén el valor de x , en cada figura.



Encuentra el valor del ángulo.



5.



Clasificación de los triángulos por sus lados.

- EQUILÁTERO
- ISÓSCELES
- ESCALENO

Clasificación de los triángulos por sus ángulos.

- RECTÁNGULO
- ACUTÁNGULO
- OBTUSÁNGULO

Ángulos suplementarios

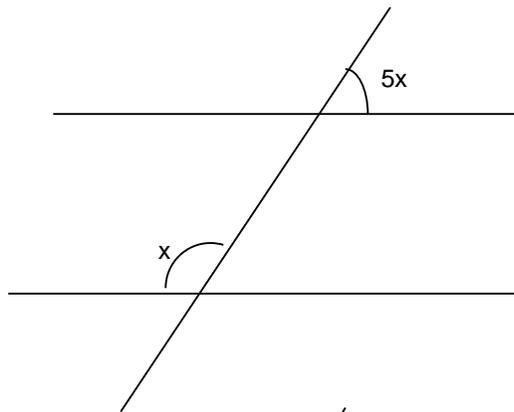
SUMAN 180°

Ángulos complementarios

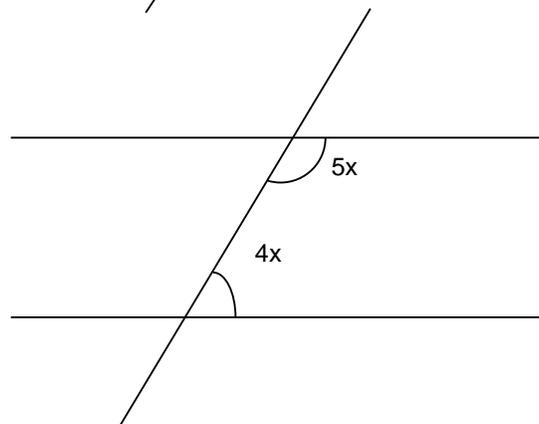
SUMAN 90°

Calcula el valor de los ángulos

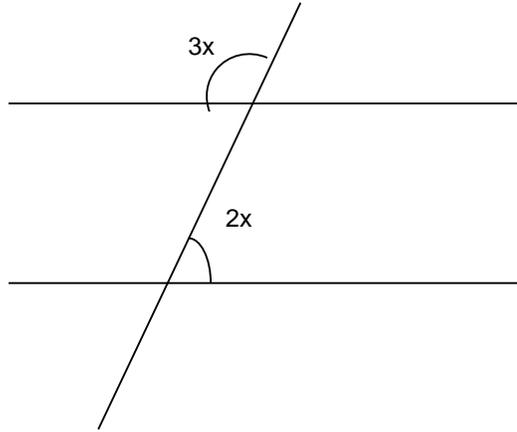
1.



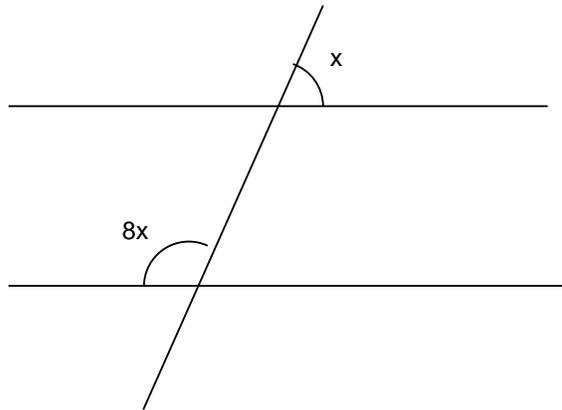
2.



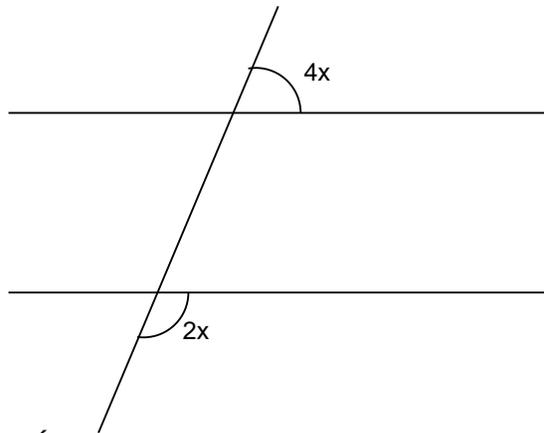
3.



4.



5.



TRIGONOMETRÍA

Calcula el resultado aplicando las leyes de los exponentes, sin utilizar calculadora.

a) 4^{-2}

b) $8^{-2/3}$

c) $(32)^{-3/5}$

d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}$

e) $11^{-3/5} \cdot 11^{-7/5}$

f) $\sqrt[4]{7^{-12}}$

Aplicando las leyes de los exponentes, sin utilizar calculadora.

1. $3^{2 \cdot 3^3} =$

2. $5^{8 \cdot 5^{-6}} =$

3. $\sqrt[3]{7^6} =$

4. $\frac{3^3}{3^5} =$

5. $(2^2)^3 =$

Para cada igualdad, escribe su equivalente en notación logarítmica.

$$\text{Log}_b x = N$$

a) $2^{-5} = \frac{1}{32}$

d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = 2$

b) $5^{-2} = \frac{1}{25}$

e) $4^3 = 64$

c) $(16)^{\frac{1}{2}} = 4$

f) $6^4 = 1296$

Para cada igualdad, escribe su equivalente en notación exponencial.

a) $\text{Log}_3 81 = 4$

b) $\text{Log}_4 \frac{1}{2} = -0.5$

c) $\text{Log} 0.001 = -3$

d) $\text{Log}_{16} \sqrt[5]{128} = \frac{7}{20}$

e) $\text{Log}_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$

Determinar N, L, b de la manera que las proporciones sean verdaderas.

$$\text{Log}_b N = L \qquad b^L = N$$

1. $\text{Log}_7 N = 3$

2. $\text{Log}_2 128 = L$

3. $\text{Log}_b \frac{1}{64} = -3$

4. $\text{Log}_{11} N = 3$

5. $\text{Log}_b 81 = -4$

6. $\text{Log}_{64} \frac{1}{16} = L$

Aplicando la definición de logaritmo, obtener el valor de la incógnita.

1. $\text{Log}_3 x = -5$
2. $\text{Log}_x \frac{1}{64} = -3$
3. $\text{Log}_x 0.5 = 0.5$
4. $\text{Log}_5 0.4 = x$
5. $\text{Log}_8 0.25 = x$

Utilizando las propiedades o leyes de logaritmos, calcula.

1. $\text{Log}_2 \left(\sqrt[4]{8} \right) \left(\frac{1}{64} \right)$
2. $\text{Log}_3 \frac{243}{\sqrt[3]{9}}$
3. $\text{Log}_2 \sqrt[3]{16} + \text{Log}_8 \sqrt[4]{2} - \text{Log}_3 \left(27 \sqrt[3]{3} \right)$
4. $\text{Log}_2 \frac{\sqrt[3]{4}}{64\sqrt{2}} + \text{Log}_3 \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{27}$
5. $3^{1+\log_3 4} + 2^{\log_2 3-1}$

Usando leyes de logaritmos, desarrolla al máximo.

1. $\text{Log}_b a^2 b^3 c$
2. $\text{Log}_a \frac{a^2 b}{c^3}$
3. $\text{Log}_b \sqrt[5]{a^3 c^2}$
4. $\text{Log}_b x \sqrt{x \sqrt{x}}$
5. $\text{Log}_b \sqrt[5]{\frac{x^2 \sqrt{4}}{\sqrt{z}}}$

Determinar el logaritmo de las siguientes expresiones, utilizando leyes de los logaritmos.

1. $N = a^2 b^3 c^4$
2. $Q = \frac{(a^2 b^{-3})^{-2}}{\sqrt[5]{a^2 b^3}}$
3. $P = \frac{\sqrt[3]{a^2 (b^2)}}{a^2 c^3}$
4. $R = \frac{\sqrt[3]{a^2 b^5}}{\sqrt[5]{a^2 b^3 c}}$
5. $T = \sqrt[5]{\frac{a^3 b^2}{c^9 d^3}}$

Combinando logaritmos. escribe el resultado como el logaritmo de un solo número o expresión.

1. $\text{Log}_{10} 9 - \text{Log}_{10} 8 - \text{Log}_{10} \sqrt{75} + \text{Log}_{10} \sqrt{\frac{25}{27}}$
2. $3\text{Log}_{10} \sqrt{9} - 2\text{Log}_{10} b - 3\text{Log}_{10} \sqrt[4]{a} + 5\text{Log}_{10} \sqrt{b}$
3. $\text{Log}_b 5t + 2\text{Log}_b (t^2 - 4) - \frac{1}{2} \text{Log}_b (t + 3)$
4. $3\text{Log}_b u - 2\text{Log}_b (u + 1) - 5\text{Log}_b (u - 1)$
5. $\text{Log}_b x - 2\text{Log}_b x + 3\text{Log}_b (x + 1) - \text{Log}_b (x^2 - 1)$

Utilice las propiedades de los logaritmos para transformar el primer miembro de la ecuación en el segundo miembro.

1. $\text{Log}_b \sqrt{\frac{x^2 - 16}{(x + 4)^2}} = \frac{1}{2} \text{Log} (x - 4) - \frac{1}{2} \text{Log}_b (x + 4)$
2. $\text{Log}_b \left[\frac{(x - 3)^{\frac{7}{3}}}{x^2 (x^2 - 9)} \right] = \frac{4}{3} \text{Log}_b (x - 3) - \text{Log}_b (x + 3) - 2\text{Log}_b x$
3. $\text{Log}_2 \left(\frac{z^2 2^z}{2^{z^2}} \right) = z - z^2 + 2\text{Log}_2 z$
4. $\text{Log}_{10} \left(\frac{x^3 x^{x^3}}{10^x} \right) = x^3 - x + 3\text{Log}_{10} x$
5. $\text{Log}_b \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right) = 2\text{Log}_b (\sqrt{x} - 1) - \text{Log}_b (x - 1)$

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas.

1. $\text{Log}_2 (x^2 + 4x + 7) = 2$
2. $\text{Log}_7 (x + 5) + \text{Log}_7 (x - 1) = 1$
3. $\text{Log}_2 (\text{Log}_3 x) = 2$
4. $\text{Log}_7 (2x + 1) - \text{Log}_7 (3x - 1) = 0$
5. $\text{Log}_7 (3x + 1) + \text{Log}_7 (2x + 3) = 2$

Resolver el valor de x.

1. $\text{Log}_{10} (x + 3) + \text{Log}_{10} x = 1$
2. $\text{Log}_{10} (x - 15) = 2 - \text{Log}_{10} x$
3. $x^{\text{Log}_{10} x} = 100x$
4. $\text{Log}_{10} (x - 2) - \text{Log}_{10} (2x + 1) = \text{Log}_{10} \frac{1}{x}$
5. $x^{(\text{Log}_{10} x^x + 20)} = 1000$

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

1. $\text{Log}_5(2x-4) - \text{Log}_5(x-1) = 1$
2. $\text{Log}_7(x+1) + \text{Log}_7(x-5) = 1$
3. $\text{Log}_2(2x-4) - \text{Log}_2(x_2 - 4x + 4) = -1$
4. $\text{Log}(x^2 - 4) - \text{Log}(x-2) = 1$
5. $\text{Log}_5(2x+4) = 1 + \text{Log}_5(x-1)$

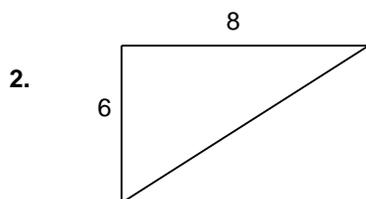
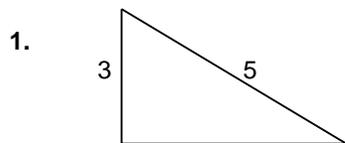
Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

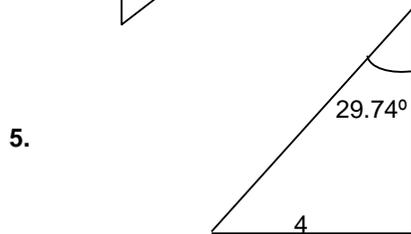
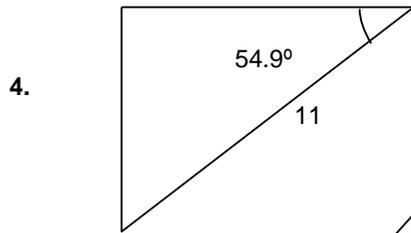
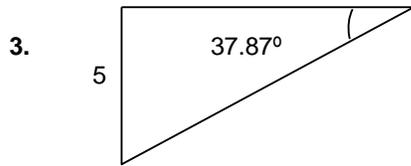
1. $6^{2x-3} = 216$
2. $3^x = \left(\frac{1}{243}\right)^{2-x}$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = 32^x$
4. $3^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{343}}$
5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = \sqrt[3]{\frac{16}{81}}$

Encontrar el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales.

1. $12^{x^2-2x+3} = 1728$
2. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$
3. $5^{x+1} + 5^x = 750$
4. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$
5. $\text{Log}_2(9^{x-1} + 7) = 2\text{Log}_2(3^{x-1} + 1)$

Calcula el valor de los lados y ángulos.





1.- Cuando la sombra proyectada por un poste era de 7.5 m de largo, el ángulo de elevación del sol era de $36^{\circ}30'$ ¿Cuál es la altura del poste?

$$R = 5.55 \text{ m.}$$

2.- ¿Qué sombra proyectará un poste de 8 m. de altura cuando el ángulo elevación del sol es de 35° ?

$$R = 11.42 \text{ m.}$$

3.- En una circunferencia de 10 cm de radio se inscribe un decágono regular. Determina la longitud del lado de dicho polígono.

$$R = 6 \text{ cm.}$$

4.- Cuando el ángulo de elevación del sol es de 70° , un árbol proyecta una sombra de 5 m. ¿Cuál es la altura del árbol?

$$R = 13.74 \text{ m.}$$

5.- Determina el ángulo de la base de una sección cónica, si su altura es de 10 cm. y el radio de la base es de 6 cm.

$$R = 59^{\circ}2'$$

6.- Un avión está a 2000 m. de altura y a 5 km de la costa. Ascende entonces con un ángulo de 30° respecto al horizontal y vuela en dirección a la costa ¿Qué altura lleva el avión cuando pasa sobre la costa?

$$R = 4,886.75 \text{ m.}$$

7.- Un barco B está al oeste de un faro F, después de haber recorrido 50 km. en dirección norte sur, el faro se ve desde el barco en dirección noreste ¿A qué distancia del faro estaba el barco en el momento de partir?

8.- Una escalera de 20 pies de largo descansa sobre la pared de un edificio, de tal forma que el ángulo entre la escalera y la pared es de 22°

a) ¿A qué distancia de la pared del edificio está la pared inferior de la escalera?

- b) Si la distancia anterior se incrementa en 3 pies, ¿Qué tanto se mueve hacia abajo la parte superior de la escalera?

R = 7.49 y 1.51 pies.

9.- Se tiene una fuente luminosa en el piso y a una distancia de 5 m. se coloca un objeto de 1.5 m. de altura. ¿De que tamaño proyectara su sombra sobre una pantalla colocada a 20 m. de la fuente luminosa?

R = 6 m.

10.- El ojo de un observador se halla a 1.60 m. sobre el nivel del suelo y a una distancia de 1.30 m. de un muro de 2.19 m. de altura. En ese instante se observa un avión sobre el muro. ¿Cuál es el ángulo de elevación del avión con respecto al eje del observador?

R = $24^{\circ}24'38.66''$.

11.- Cuando pasa sobre la barda que delimita a un aeropuerto, el altímetro de un avión indica 70 m. de altura. El piloto pone en ascenso continuo al avión y vuela sobre una pista señalada en su mapa, desplazándose 700 m. horizontalmente del punto en que cruzo la barda. En ese instante el altímetro señala 309 m. ¿Con que ángulo respecto a la horizontal, asciende el avión?

R = $18^{\circ}51'4.94''$.

12.- Un asta bandera está colocada verticalmente en el remate de una torre. Desde un punto situado a 30 m. del pie de la torre y frente al asta, los ángulos de elevación al extremo superior y a la base del asta son de 51° y 47° , respectivamente. El ojo del observador está a 1.60 m. del suelo, determina:

- a) La altura de la torre.
- b) La altura del asta.

R = 33.77 y 4.87 m.

13.- Volando a una altura de 3000 m., un observador mide los ángulos de depresión de las orillas opuestas del Amazonas, ambas situadas sobre la misma línea visual del sextante y resultan ser de 48° y 25° , respectivamente. ¿Qué anchura tiene el río en el lugar de la observación?

R = 3,732.30 m.

14.- Un avión desde una altura de 2,000 m. observa el principio y fin de la pista con ángulos de declinación de 55° y 45° respectivamente, calcula la longitud de la pista.

R = 599.58 m.

15.- a) ¿Qué ángulo forma con el piso una escalera de 7 m. de largo, si el pie de la escalera dista 2.5 m. de la base del muro donde está apoyada?

- b) Si el extremo de la escalera sobre el piso ha resbalado 0.50 m., ¿Cuánto se deslizó el extremo que se apoya sobre el muro?

R = $69^{\circ}4'30.6''$, 0.21 m.

16.- Desde un punto A a 8.20 m. del suelo, el ángulo de elevación a la punta del edificio es de $31^{\circ}20'$, y el ángulo de depresión a la base de dicho edificio es de $12^{\circ}50'$. Calcula la altura del edificio.

R = 30.11 m.

17.- Un globo empieza a elevarse verticalmente desde un punto A situado en el suelo, una persona ubicada en otro punto B marcado en el suelo y a 90 km. del punto A, mide en dos ocasiones el ángulo de elevación, encontrado que dicho ángulo cambia de $21^{\circ}40'$ a $32^{\circ}20'$. Calcula que distancia se eleva el globo durante el periodo transcurrido entre las dos observaciones.

R = 21.21 km.

18.- Se desea construir un túnel que atraviese una montaña, para lo cual se pone una marca en la parte más alta de la montaña, a 450 m. de altura. De un extremo de la montaña y a 200 m. de la base, se mide un ángulo de elevación de $40^{\circ} 20'$ a la marca; del otro extremo de la montaña y a 150 m. de la base, se mide un ángulo de elevación de $36^{\circ} 50'$ a la misma marca. ¿Cuál será la distancia del túnel?

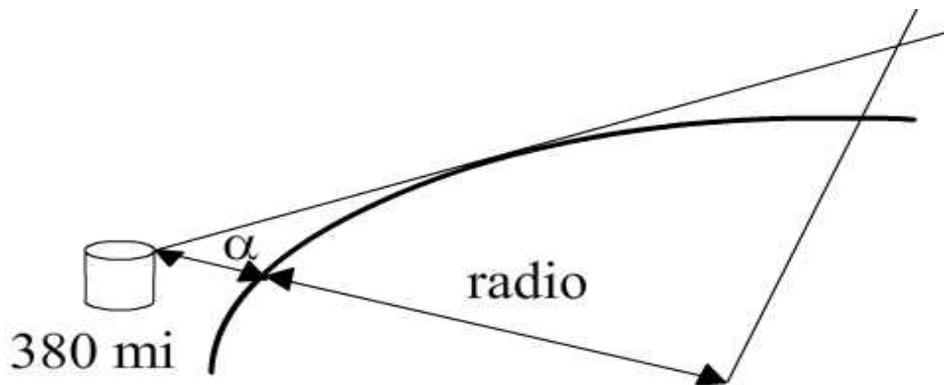
$$R = 780.79 \text{ m.}$$

19.- Desde un punto P situado a nivel del suelo, el ángulo de elevación de la línea visual a la parte alta de la torre es de $26^{\circ}50'$. Desde otro punto Q situado entre el punto P y la base de la torre y a 25 m. de P, el ángulo de elevación de la línea visual a la parte alta de la torre es de $53^{\circ}30'$. Calcula la altura de la torre.

$$R = 20.21 \text{ m.}$$

20.- Un laboratorio espacial gira alrededor de la tierra a una altitud de 380 millas. Cuando un astronauta observa el horizonte terrestre, el ángulo α mostrado en la figura es de 65.8° . Con ésta información, calcula el radio de la tierra.

$$R = 3944.08 \text{ mi.}$$

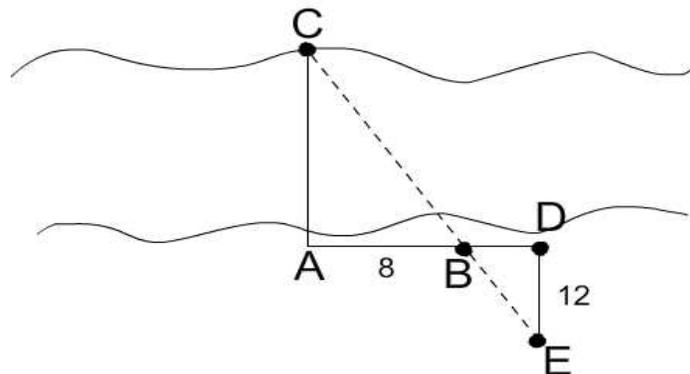


21.- Un niño mide 1.60 m. de altura, en un momento dado proyecta una sombra de 0.50 m. de largo. En ese instante el asta bandera del patio de su colegio proyecta una sombra de 1.40 m. Calcular la altura del asta bandera.

22.- Una regla de 1 m. de largo se coloca verticalmente en el piso y vemos que proyecta una sombra de 85 cm. de largo. En ese momento el poste de la luz proyecta una sombra de 4.80 m. ¿Calcular la altura del poste?

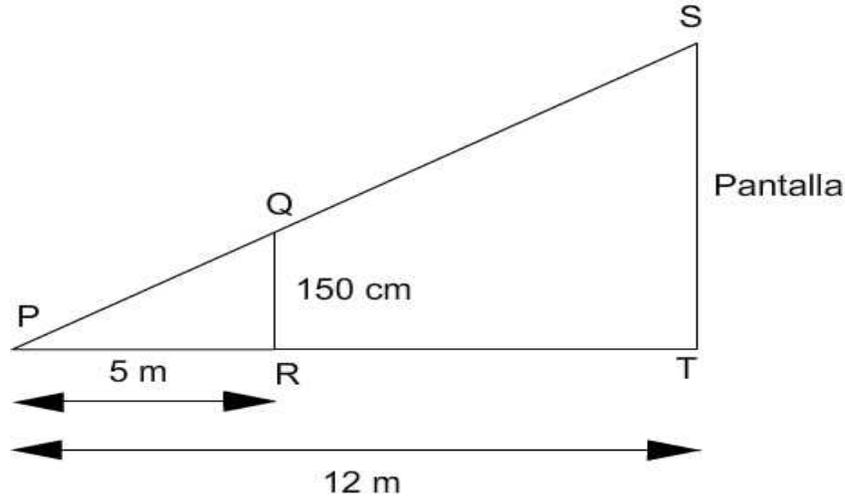
23.- Para medir lo ancho \overline{AC} de un río, un hombre tomó las medidas indicadas en la figura.

\overline{AC} es perpendicular a \overline{AD} y \overline{BD} perpendicular a \overline{DE} , si \overline{AB} mide 8 m., \overline{BD} mide 6 m., \overline{DE} mide 12 m., calcula la anchura del río.



24.- La sombra de un arbusto de 123 cm. de altura es de 0.75 m.; en ese momento un árbol proyecta una sombra de 24 m. ¿Cuál es su altura?

25.-Tenemos una fuente luminosa, colocamos a una distancia de 5 m. un cuerpo de 150 cm. de altura ¿De que tamaño proyectará su imagen en una pantalla colocada a 20 m.?



26.- Un muchacho observa que la sombra de un árbol tiene 15.68 m. de largo cuando el de su sombra es de 1.95 m. Si la altura del muchacho es de 1.73 m. ¿Cuál es la altura del árbol? (supóngase que los rayos del sol son paralelos).

27.-Una escalera de 15 pies de longitud se coloca contra un poste con la base a 9 pies del poste. ¿A qué altura del suelo está la parte más alta de la escalera?

28.- Una persona viaja 8 millas al norte, 3 millas al oeste, 7 millas al norte y 11 millas al este. ¿A qué distancia está la persona del punto original?

29.- Una escalera está reclinada en un edificio. Si la escalera forma un ángulo de 63° con el suelo y llega al edificio a una altura de 16 m., ¿A que distancia del edificio se encuentra el pie de la escalera?

30.- Un guardabosque se encuentra en una torre a 40 m. sobre el nivel del suelo. Descubre un incendio a un ángulo de depresión de 6° ¿A que distancia se encuentra el incendio de la torre del guardabosque?

31.- Un alambre de soporte debe ser colocado en la punta de un poste telefónico de 30 pies de altura y fijado en la tierra ¿Qué cantidad de alambre se necesitará para que hiciera un ángulo de 50° con el nivel del suelo?

32.- Una escalera eléctrica debe transportar a la gente a una distancia vertical de 18 pies y debe hacer un ángulo de 20° con el suelo ¿Qué longitud debe tener la escalera?

33.- Un globo de aire caliente se mantienen a una altitud constante de 800 m. y pasa directamente por encima de un observador. Después de 2 minutos, el observador ve el globo con un ángulo de elevación de 70° Determine la velocidad del globo en km/hr.

34.- Una lancha de motor se encuentra a media milla exactamente enfrente del punto A y viaja en dirección paralela de la playa. Después de 5 min. se observa la lancha a un ángulo de 34° retirada de la línea de visión original. Determine la velocidad de la lancha en millas por hora.

35.- Si un hombre de 6 pies de altura proyecta una sombra de 9 pies de largo sobre el nivel del suelo, aproxime el ángulo de elevación del sol redondeando al grado más cercano.

36.- Si el sol se encuentra a un ángulo de elevación de 62° , ¿Qué largo tendrá la sombra proyectada por una niña de 5 pies de altura?

37.- Un observador de la guardia costera se encuentra en un faro a 58 pies sobre el nivel del agua observa dos barcos en lados opuestos al faro, sobre la misma línea de visión. Uno se encuentra con un ángulo de depresión de 41° y se dirige directamente hacia el faro, mientras que el otro se encuentra con un ángulo de depresión de 28° y se traslada en dirección opuesta al faro. ¿Qué distancia hay entre los dos barcos?

38.- A medida que un observador se levanta verticalmente, su ángulo de elevación desde un punto P, en el suelo situado a 110 km. Del punto Q que está directamente bajo el globo, cambia de 19° a 32° determine que tan lejos se eleva el globo durante ese periodo.

39.- Una mujer se encuentra parada en una ventana a 80 pies sobre el nivel el suelo. Observa a un niño que camina directamente hacia ella, mientras que el ángulo de depresión hacia el niño cambia de 42° a 65° ¿Qué distancia a recorrido el niño?

40.- Una escalera de 20 pies de largo descansa sobre la pared de un edificio. Si el ángulo entre la escalera y el edificio es de 22° .

- ¿Aproximadamente a que distancia del edificio esta la parte inferior de la escalera?.
- Si esa distancia se incrementa en 3 pies, ¿Aproximadamente, que tanto se mueve la parte superior de la escalera hacia debajo de la pared?

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

$$1. 3\operatorname{tg}\alpha + 3\operatorname{ctg}\alpha = 4\sqrt{3}$$

$$2. 2\operatorname{sen}\alpha + \cos^2 \alpha = \frac{7}{4}$$

$$3. \operatorname{sen}x + 1 = \cos x$$

$$4. \sec \alpha = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$$

$$5. 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}x = 0$$

Funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

1.- Determina todas las funciones trigonométricas del ángulo α y el ángulo, sabiendo que:

$$a) \operatorname{ctg}\alpha = \frac{24}{7}, \text{ con } \alpha \text{ en el } 3^{\text{er}} \text{ cuadrante.}$$

$$b) \operatorname{csc}\alpha = \frac{-2}{\sqrt{3}}, \text{ con } \alpha \text{ en el } 3^{\text{er}} \text{ cuadrante.}$$

$$c) \operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}, \text{ con } \alpha \text{ en el } 4^{\text{to}} \text{ cuadrante.}$$

$$d) \sec \alpha = -\sqrt{5}, \text{ con } \alpha \text{ en el } 2^{\text{do}} \text{ cuadrante.}$$

$$e) \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ con } \alpha \text{ en el } 2^{\text{do}} \text{ cuadrante.}$$

Funciones de 30° , 60° , y 45° sin calculadora.

DEMOSTRACIONES.

Triángulos oblicuángulos.

1. $a = 4.8$, $b = 8$, $B = 25^\circ$, CALCULA $\text{sen}A$ Y $\text{sen}C$.

2. $a = 4$, $b = 10$, $B = 150^\circ$, CALCULA A , C , c .

3. $A = 135^\circ$, $B = 30^\circ$, $a = 12$, CALCULA b , c , C .

4. $A = 130^\circ$, $a = 10$, $b = 7$, CALCULA b , c , C .

5. $a = 17$, $b = 12$, $c = 7$, CALCULA A , B , C .

Comprueba las siguientes Identidades trigonométricas.

1. $\text{ctgx} + \text{sen}x = \cos x$

2. $\text{sen}y \sec y = \text{tgy}$

3. $1 = 2 \cos x \sec x - \text{tg}x \text{ctgx}$

4. $\frac{\text{tg}x}{\text{sen}x} = \sec x$

5. $\text{tgy} + \text{ctgy} = \frac{1}{\text{sen}y \cos y}$

6. $\sec^2 x = \csc x \text{sen}x + \frac{1}{\text{ctg}^2 x}$

7. $\sec A - \text{tg}A \text{sen}A = \cos A$

8. $(\sec x - \text{tg}x)^2 = \frac{1 - \text{sen}x}{1 + \text{sen}x}$

9. $\frac{1 + \cos^2 w - \text{sen}^2 w}{2 \text{sen}w \cos w} = \text{ctgw}$

10. $\frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta} = \left(\frac{1}{\text{sen} \beta} + \frac{1}{\text{tg} \beta} \right)^2$

11. $\text{ctg} \alpha + \frac{\text{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \csc \alpha$

12. $\frac{1 - \text{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{\cos \beta}{1 + \text{sen} \beta}$

13. $\text{tg} \alpha + \frac{\cos \alpha}{1 + \text{sen} \alpha} = \sec \alpha$

14. $\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \operatorname{ctg}^2 x$
15. $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 2 \operatorname{csc} \alpha$
16. $\frac{\sec x + \csc x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \operatorname{sen} x + \cos x$
17. $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \csc \alpha} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha$
18. $\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{sen}^2 A = \frac{\operatorname{sen}^4 A}{\cos^2 A}$
19. $\frac{1 - (\operatorname{sen} x - \cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x} = \cos x$
20. $\frac{1 - \cos^2 y}{(1 - \operatorname{sen} y)(1 + \operatorname{sen} y)} = \operatorname{tg}^2 y$
21. $\frac{1 - \csc y}{1 + \csc y} = \frac{\operatorname{sen} y - 1}{\operatorname{sen} y + 1}$
22. $\operatorname{sen}^4 w - \cos^4 w = 1 - 2 \cos^2 w$
23. $\operatorname{sen}^4 x + 2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$
24. $\frac{\cos x}{\csc x + 1} + \frac{\cos x}{\csc x - 1} = 2 \operatorname{tg} x$
25. $\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = 2 \sec x$
26. $\frac{\cos x \sec x}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$
27. $\sec^2 y - \operatorname{sen}^2 y = \cos^2 y + \operatorname{tg}^2 y$
28. $\frac{\operatorname{tg} x + \cos x}{\operatorname{sen} x} = \sec x + \operatorname{ctg} x$
29. $\cos^2 y + 9 = 10 - \operatorname{sen}^2 y$
30. $\operatorname{csc} A = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A}$

31. $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\operatorname{tg} x = \sec^2 x$
32. $\operatorname{csc}^2 A = \frac{1}{1 - \cos^2 A}$
33. $\sec^2 x \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{csc}^2 x$
34. $\operatorname{sen} \beta (\operatorname{csc} \beta - \sec \beta) = 1 - \operatorname{tg} \beta$
35. $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 1$
36. $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{csc} x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$
37. $\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} A = \sec A \operatorname{csc} A$
38. $\frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x$
39. $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \sec \alpha} = \operatorname{sen} \alpha$
40. $\frac{\operatorname{sen} \beta}{\sec \beta} = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{csc}^2 \beta}$
41. $\cos \delta \operatorname{sen} \delta (\operatorname{ctg} \delta + \operatorname{tg} \delta) = \sec^2 \delta - \operatorname{tg}^2 \delta$
42. $\frac{\operatorname{csc} \beta}{\cos \beta} = (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \operatorname{ctg} \beta$
43. $1 + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sec \alpha - 1}$
44. $\cos^2 \mu (1 + \operatorname{ctg}^2 \mu) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \mu}$
45. $\frac{1}{\operatorname{tgy} + \operatorname{ctgy}} = \operatorname{sen} y \cos y$
46. $(1 - \operatorname{sent})(1 + \operatorname{sent}) = \frac{1}{\sec^2 t}$
47. $\frac{\cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{csc} \alpha - \sec \alpha} = 1 + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$
48. $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^6 \alpha$

$$49. \frac{(1 - \operatorname{ctg} \varphi)^2}{\operatorname{csc}^2 \varphi} + 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = 1$$

$$50. \frac{\operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi + 1}{\operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi - 1} = \frac{\operatorname{sen} \varphi + 1}{\cos \varphi}$$

$$51. \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 1 - 2 \cos^2 x$$

$$52. \sec^4 x (1 - \operatorname{sen}^4 x) - 2 \operatorname{tg}^2 x = 1$$

$$53. \frac{\cos^2 z - 3 \cos z + 2}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{2 - \cos z}{1 + \cos z}$$

$$54. \frac{\operatorname{sen}^2 t - 4 \operatorname{sen} t + 3}{\cos^2 t} = \frac{3 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t}$$

$$55. \frac{\cos^3 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} = 1 + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$56. \frac{2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x - 3}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \cos x - 1}{1 + \cos x}$$

$$57. \frac{3 \cos^2 x + 5 \operatorname{sen} x - 5}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{3 \operatorname{sen} x - 2}{1 + \operatorname{sen} x}$$

$$58. \operatorname{ctg} (90 - \varphi) = \frac{2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{1 + \cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$59. \frac{\operatorname{csc} \mu \operatorname{sen} (180 - \mu)}{\operatorname{sen} (90 + \mu)} = -\operatorname{sen} \mu$$

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

- | | |
|---|-----------|
| a) $2 \cos \alpha + 1 = 0.$ | R 120. |
| b) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen} \alpha = 1$ | R -21.47 |
| c) $\cos^2 \beta = 2 - \cos \beta$ | R 0 |
| d) $3 + 3 \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 x$ | R 120,180 |
| e) $3 \operatorname{tg} \alpha + 3 \operatorname{ctg} \alpha = 4\sqrt{3}$ | R 60,30 |
| f) $3 + 3 \cos x = 2(1 - \cos^2 x)$ | R 120,180 |

- g) $2\operatorname{sen}\alpha + \cos^2 \alpha = 7/4$ R 30.
- h) $\operatorname{sen}x + 1 = \cos x$ R 0,-90
- i) $\cos 2x + \operatorname{sen}x = 0$ R 90,-30
- j) $\operatorname{sen}2x = \cos 2x$ R 22.5,-22.5
- k) $\operatorname{sen}2x + \cos x = 0$
- l) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$
- m) $\cos 2x + \operatorname{sen}x = 1$
- n) $\operatorname{sen}^2 \alpha = 3\cos^2 \alpha$
- o) $\cos x + 2\operatorname{sen}x = 2$
- p) $\sec \alpha = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$
- q) $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}x = 0$